الوداد

الرياضيات

الفرع العلمي

التوجيهي

التلاخيص

تطبيقات القيم القصوي

2023

تطبيقات القيم القصوي

نريد حجم أو مساحة أو تكاليف أو مسافة أن تكون أكبر ما يمكن
أو أصغر ما يمكن وبالتالي

هي قيمة عظمى مطلقة
أو صغرى مطلقة ⇐ $ق'(س) = ٠$ ونستبعد
الغير مرغوبة لأنه
تطبيقات من الحياة العملية

ولكن قبل اشتقاق الاقتران الذي نريده أكبر ما يمكن
أو أصغر ما يمكن يجب أن نتأكد أنه بدلالة متغير واحد.

* عددان صحيحان موجبان مجموعهما ٢٠ أوجد أكبر حاصل ضرب لهما

نفرض العددان س، ص

$س + ص = ٢٠$ ⇐ $ص = ٢٠ - س$

$هـ = س ص$ أكبر ما يمكن

$هـ = س (٢٠ - س)$

$هـ = ٢٠ س - س^٢$

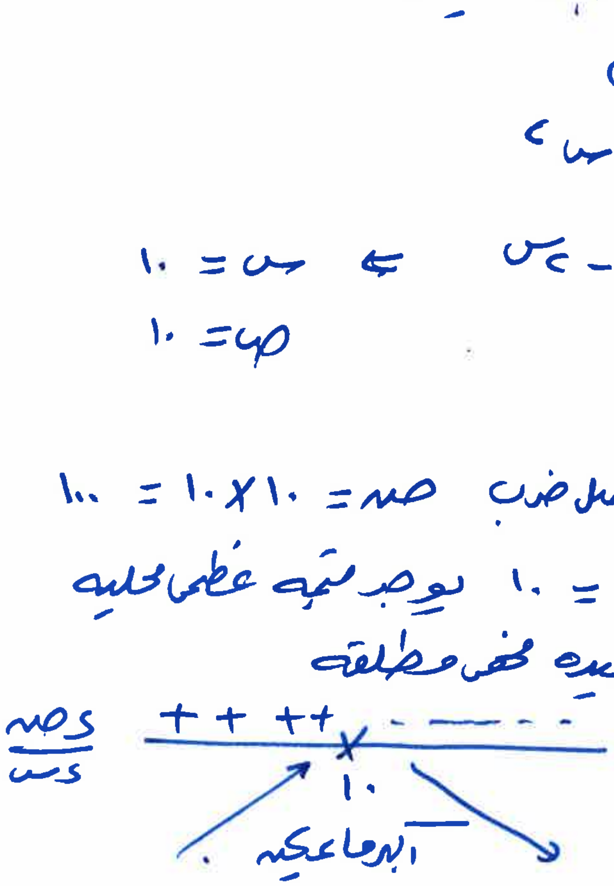
$\frac{د هـ}{د س} = ٠ = ٢٠ - ٢ س$ ⇐ $س = ١٠$

$ص = ١٠$

العددان ١٠، ١٠

فيكون أكبر حاصل ضرب $هـ = ١٠ \times ١٠ = ١٠٠$

لأنه عند $س = ١٠$ يوجد قيمة عظمى محلية
وحيدة فهي مطلقة



- يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل من أرضه وذلك بسياج فإذا كان لديه ٨٠سم من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها.

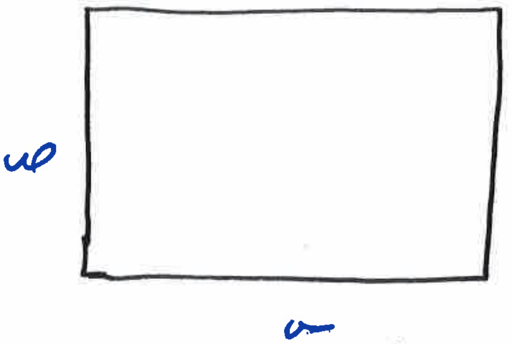
نفرض طول الحديقة س

عرض الحديقة ص

٨٠ = محيط الحديقة

٨٠ = ٢س + ٢ص

س + ص = ٢٠ ⇐ ص = ٢٠ − س



م = س ص   أكبر ما يمكن

م = س × (٢٠ − س)

م = ٢٠س − $س^٢$ أكبر ما يمكن

$\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ = ٢٠ − ٢س = ٠

⇐ ٢س = ٢٠

⇐ س = ١٠   نعوض   ص = ١٠

طول الحديقة = ١٠

عرض الحديقة = ١٠

$\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ +++++ × − − − −

١٠

عكن استخدام اختبار المشتقة الثانية

$\frac{\text{د}^٢\text{م}}{\text{دس}^٢}$ = −٢ < ٠

عظمى محلية

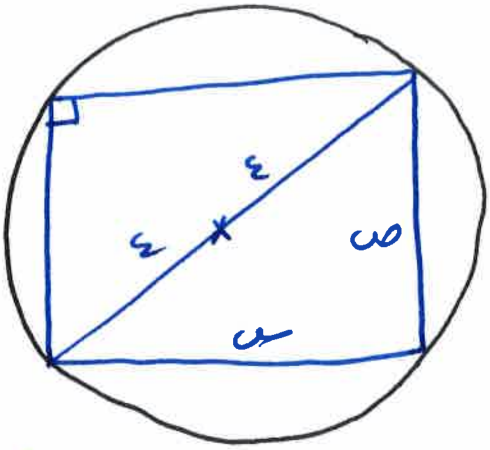
حيث س = ١٠ قيمة عظمى محلية وهي وحيدة ⇐ مطلقة

يعني أكبر مساحة للحديقة عندما ص = ١٠

وتساوي م = ١٠×١٠ = ١٠٠

جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤سم بحيث تقع رؤوسة على محيط الدائرة

حتى يكون المستطيل أكبر ما يمكن
قطر المستطيل هو قطر الدائرة
نفرض طول المستطيل س
عرض المستطيل ص .



الزاوية المحيطية
المرسومة في نصف دائرة
قائمة .

من فيثاغورس $س^{٢} + ص^{٢} = ٦٤$

$ص = \sqrt{٦٤ - س^{٢}}$

$م = س\,ص$ أكبر ما يمكن

$م = س \times \sqrt{٦٤ - س^{٢}}$

$\frac{دم}{دس} = ٠ = \frac{س \times -\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{٦٤ - س^{٢}}} + \sqrt{٦٤ - س^{٢}} \times ١$

$٠ = \frac{-س^{٢}}{\sqrt{٦٤ - س^{٢}}} + \sqrt{٦٤ - س^{٢}}$

$\frac{س^{٢}}{\sqrt{٦٤ - س^{٢}}} = \sqrt{٦٤ - س^{٢}} \Leftarrow ٦٤ - س^{٢} = س^{٢}$

$\Leftarrow ٢س^{٢} = ٦٤ \Leftarrow س^{٢} = ٣٢$

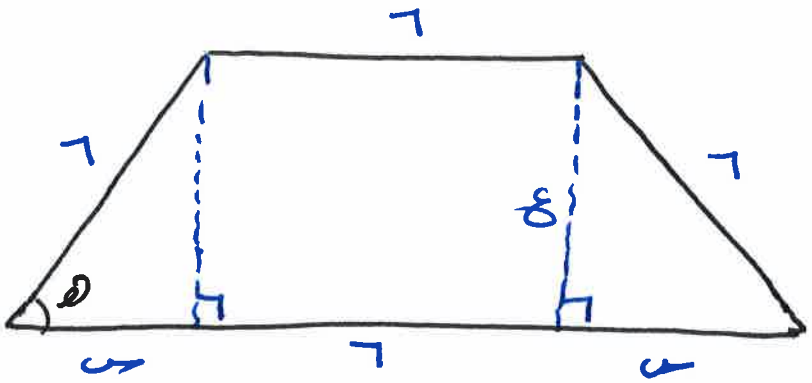
$\Leftarrow س = ٤\sqrt{٢}$

$ص = \sqrt{٦٤ - ٣٢} = \sqrt{٣٢}$
$= ٤\sqrt{٢}$

$\frac{دم}{دس}$ +++++ ------
$٤\sqrt{٢}$
عظمى محلية ووحيدة ⟸ عظمى مطلقة

أكبر مستطيل $= ٤\sqrt{٢} \times ٤\sqrt{٢}$
$= \underline{\underline{٣٢}}$.

- شبه منجرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦سم، أوجد طول الضلع الرابع بحيث مساحته أكبر مايمكن (أوجد زاويته) .



من فيثاغورس

$ع = \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

$م = \frac{١}{٢} (\text{مجموع القاعدتين}) \times \text{الارتفاع}$

$م = \frac{١}{٢} (٦ + ٦ + ٢س) \times ع = \frac{١}{٢} (٢س + ١٢) \times ع$

$م = (س + ٦) \times \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ أكبر ما يمكن .

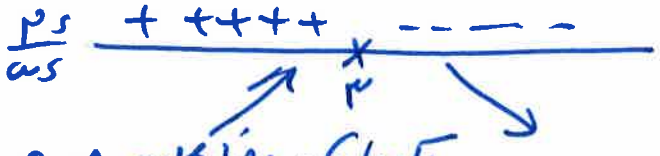
$\frac{دم}{دس} = (س + ٦) \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٣٦ - س^{٢}}} + \sqrt{٣٦ - س^{٢}} \times ١ = ٠$

$٠ = \frac{-(٦س + س^{٢})}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}} + \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

$\frac{٦س + س^{٢}}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}} = \sqrt{٣٦ - س^{٢}} \Leftarrow ٦س + س^{٢} = ٣٦ - س^{٢}$

$\Leftarrow ٢س^{٢} + ٦س - ٣٦ = ٠ \Leftarrow س^{٢} + ٣س - ١٨ = ٠$

$\Leftarrow (س + ٦)(س - ٣) = ٠ \Leftarrow س = -٦$ ✗ ، $س = ٣$ ✓



أكبر ما يمكن عظمى محلية وحيدة

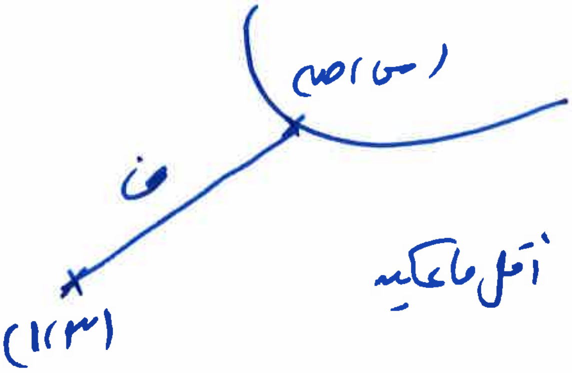
طول الضلع الرابع ١٢

$جتاهـ = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

$هـ = ٦٠^{\circ}$.

- جد الإحداثي السني للنقطة الواقعة على منحنى العلاقة ص ^{٢} − ٢ص + ٤س − ٢٣ = ٠ وتكون أقرب ما يمكن للنقطة (٣، ١) .

من أصل العلاقة $\text{ص}^2 - ٢\text{ص} = ٢٣ - ٤\text{س}$



المطلوب $\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} - ١)^2}$ أقل ما يمكن

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 - ٦\text{س} + ٩ + \text{ص}^2 - ٢\text{ص} + ١}$$

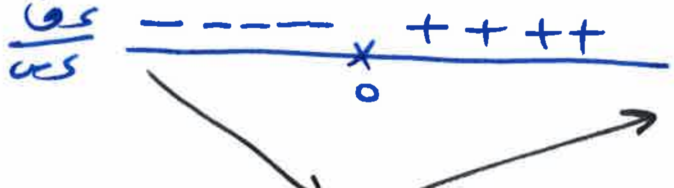
$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 - ٦\text{س} + ٩ + ٢٣ - ٤\text{س} + ١}$$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 - ١٠\text{س} + ٣٣}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دس}} = ٠ = \frac{٢\text{س} - ١٠}{٢\sqrt{\text{س}^2 - ١٠\text{س} + ٣٣}} = ٠ \Leftarrow ٢\text{س} - ١٠ = ٠$$

$$\Leftarrow \text{س} = ٥$$

المطلوب الاحداثي السيني $\text{س} = ٥$



أصغر ما يمكن لأن صغرى محلية وحيدة

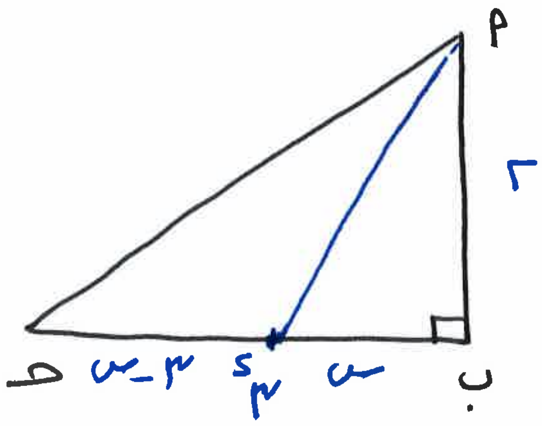
اذا طلب المسافة

$$\text{ف} = \sqrt{٥^2 - ١٠ \times ٥ + ٣٣}$$

$$\text{ف} = \sqrt{٨}$$

قانون المسافة بين نقطتين $= \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^2 + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^2}$

- أ ب جـ Δ قائم الزاوية في ب فإذا كان طول أ ب = ٢سم وطول ب جـ = ٣سم ، ء نقطة على ب جـ، أوجد طول ء جـ بحيث يكون مجموع طول ء جـ ومثلي طول أ ء أقل ما يمكن .



نفرض ب ء = س

يكون ء جـ = ٣ − س

الآن المطلوب

ل = ء جـ + ٢ أ ء أقل ما يمكن

أ ء = $\sqrt{٤ + س^٢}$ من فيثاغورث

$$ل = (٣ - س) + ٢ \times \sqrt{٤ + س^٢}$$

$$\frac{دل}{دس} = -١ + \frac{٢ \times ٢س}{٢\sqrt{س^٢ + ٤}}$$

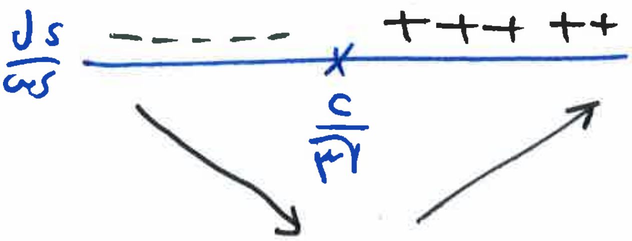
$$\frac{دل}{دس} = ٠ = -١ + \frac{٢س}{\sqrt{س^٢ + ٤}}$$

$$\frac{٢س}{\sqrt{س^٢ + ٤}} = ١ \Leftarrow \sqrt{س^٢ + ٤} = ٢س$$

بالتربيع $س^٢ + ٤ = ٤س^٢ \Leftarrow ٣س^٢ = ٤$

$$\Leftarrow س^٢ = \frac{٤}{٣} \Leftarrow س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$$

طول ء جـ = $٣ - \frac{٢}{\sqrt{٣}}$



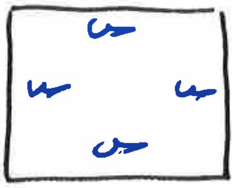
أقل ما يمكن لأن فيه صغرى محليه وحيده تعنى مطلقه

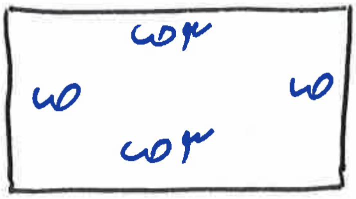
سلك طوله ٢٨سم قسم إلى جزأينن ثني الأول على شكل مربع والثاني على شكل مستطيل طوله ٣ أمثال عرضه، أوجد طول كل جزء بحيث مجموع مساحتي المربع والمستطيل أقل مايمكن.

طول السلك ٢٨

ضلع المربع س

المستطيل ص، ٣ص





تكميد ٢٨ = مجموع المحيطين

٢٨ = ٤س + ٨ص ⟸ س + ٢ص = ٧ ----(١)

↓

س = ٧ − ٢ص

م = م١ + م٢ أقل ما يمكن.

م = $س^٢$ + $٣ص^٢$

م = $٣ص^٢$ + $(٧ − ٢ص)^٢$

م = $٣ص^٢$ + ٤٩ − ٢٨ص + $٤ص^٢$

م = $٧ص^٢$ − ٢٨ص + ٤٩ أقل ما يمكن

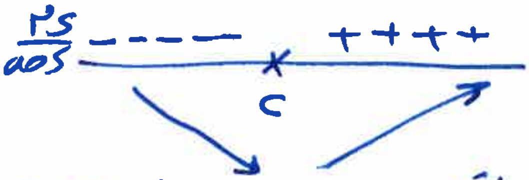
$\frac{دم}{دص}$ = ٠ = ١٤ص − ٢٨

١٤ص = ٢٨ ⟸ ص = ٢

عندما ص = ٢ ⟸ س = ٧ − ٢×٢ = ٣

طول جزء المربع ٤س = ١٢

طول جزء المستطيل ٨ص = ١٦

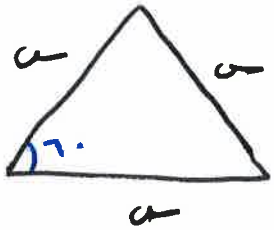


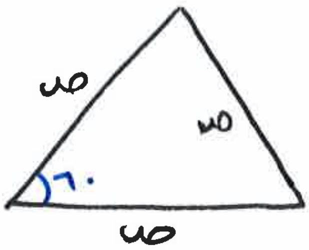
أقل مساحة لان صغرى محلية وحيدة.

- سلك طوله ١٨سم صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ماطول ضلع كل منهما ليكون مجموع مساحتيهما أقل مايمكن .

نفرض طول ضلع المثلث الأول س

نفرض طول ضلع المثلث الثاني ص





$$١٨ = ٣س + ٣ص$$

$$\Leftarrow س + ص = ٦$$

$$\Leftarrow ص = ٦ - س$$

$$م = \frac{١}{٢}س^{٢}\,جا٦٠ + \frac{١}{٢}ص^{٢}\,جا٦٠$$

$$م = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\left(س^{٢} + ص^{٢}\right)$$ أقل ما يمكن

$$م = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\left(س^{٢} + (٦ - س)^{٢}\right)$$

$$م = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\left(س^{٢} + ٣٦ - ١٢س + س^{٢}\right)$$

$$م = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\left(٢س^{٢} - ١٢س + ٣٦\right)$$

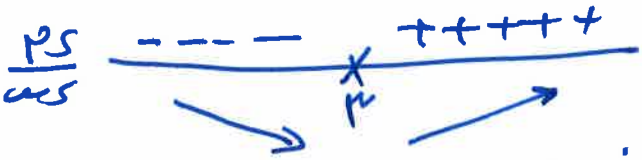
$$\frac{دم}{دس} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\left(٤س - ١٢\right) = ٠ \Leftarrow ٤س = ١٢$$

$$\Leftarrow س = ٣$$

$$ص = ٣$$

طول ضلع الأول = ٣

طول ضلع الثاني = ٣



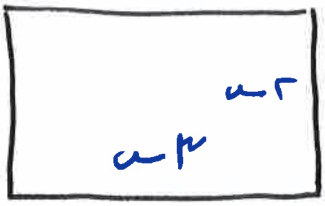
أقل مساحة لأن صغرى محلية وهي وحيدة

م المثلث = ½ حاصل ضرب ضلعين متجاورين × جيب الزاوية بينهما

سلك طوله ١٠٠سم قسم إلى جزأين كل منهما على شكل مستطيل فإذا كانت النسبة بين بعدي المستطيل الأول كنسبة ٢:٣ والنسبة بين بعدي المستطيل الثاني كنسبة ١:٤ أوجد بعدي كل مستطيل الذي يجعل مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن .

الأول ٢س ، ٣س

الثاني ص ، ٤ص



السلك طوله ١٠٠سم يتوزع على مجموع المحيطين

$١٠٠ = ١٠س + ١٠ص$

$⟸ س + ص = ١٠ ⟸ ص = ١٠ - س$

حيث ما نقول كنسبة ٢ : ٣
الطول ٣س
العرض ٢س

$م = ٢س × ٣س + ص × ٤ص$

$م = ٦س^{٢} + ٤ص^{٢}$

$م = ٦س^{٢} + ٤(١٠ - س)^{٢}$

$م = ٦س^{٢} + ٤(١٠٠ - ٢٠س + س^{٢})$

$م = ٦س^{٢} + ٤٠٠ - ٨٠س + ٤س^{٢}$

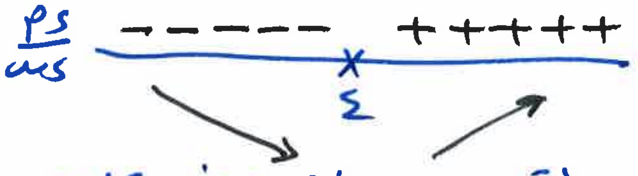
$م = ١٠س^{٢} - ٨٠س + ٤٠٠$ أقل ما يمكن .

$\frac{دم}{دس} = ٢٠س - ٨٠ = ٠ ⟸ س = ٤$

وبالتعويض ص = ٦

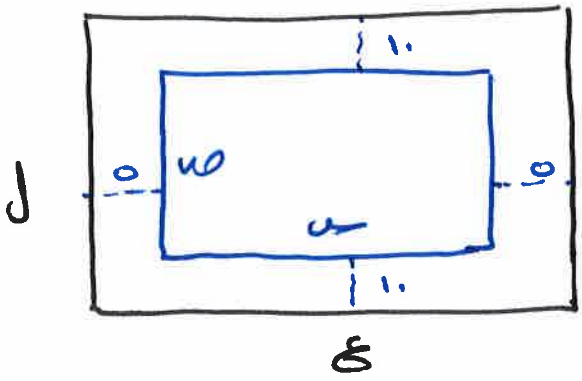
بعدي المستطيل الأول ٨ ، ١٢

بعدي المستطيل الثاني ٦ ، ٢٤



أقل ما يمكن لأنه صغرى محلية
وهي وحيدة

يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل بحيث يحتوي على ٤٥٠سم^٢ من المادة المطبوعة وبحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوي والسفلي ١٠سم وكل من الهامشين الجانبين ٥سم، مابعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن .



نفرض بعدا المادة المطبوعة

س ، ص

ص س = ٤٥٠

⇐ ص = $\frac{٤٥٠}{س}$

بعدا الملصق ع ، ل

حيث ع = س + ١٠

ل = ص + ٢٠

م$_{الملصق}$ = (س + ١٠) (ص + ٢٠) أقل ما يمكن .

م = (س + ١٠) (٢٠ + $\frac{٤٥٠}{س}$)

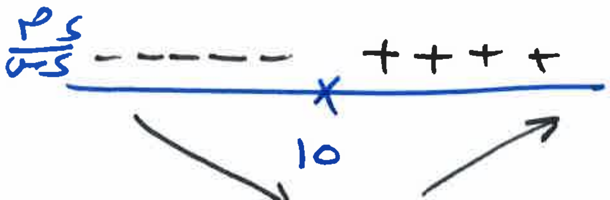
م = ٤٥٠ + ٢٠س + $\frac{٤٥٠٠}{س}$ + ٢٠٠

$\frac{دم}{دس}$ = ٠ = ٢٠ − $\frac{٤٥٠٠}{س^٢}$

⇐ $\frac{٤٥٠٠}{س^٢}$ = ٢٠ ⇐ ٢٠ س^٢ = ٤٥٠٠

⇐ س^٢ = ٢٢٥ ⇐ س = ١٥

وبالتعويض ص = ٣٠



المساحة أقل ما يمكن عند س = ١٥ صغرى محلية وحيدة

بعدا الملصق

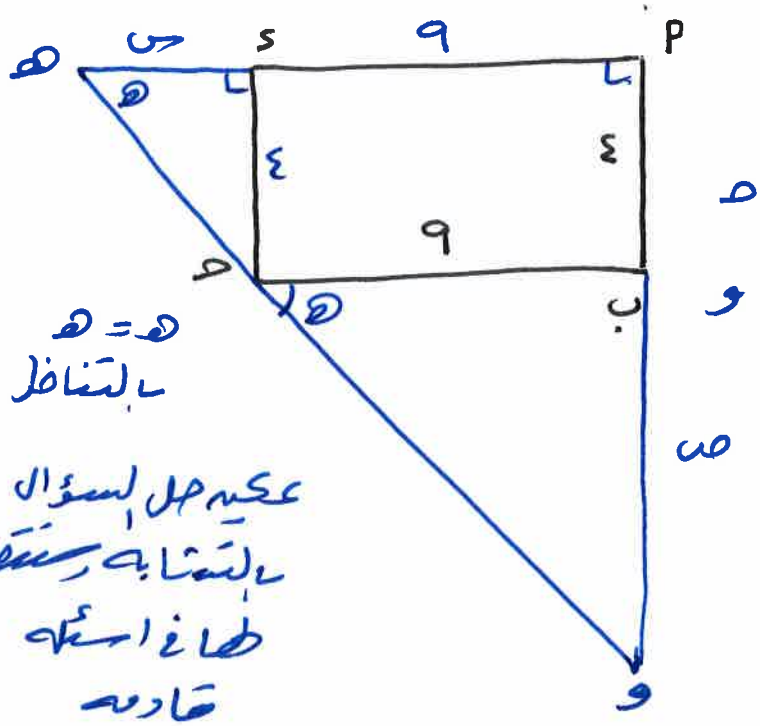
ع = س + ١٠ = ٢٥

ل = ص + ٢٠ = ٥٠

- أب جـ د مستطيل فيه أب = ٤سم، ب جـ = ٩ سم. رسم مستقيم يمر بالنقطة جـ ويقطع امتداد أد في هـ وامتداد أب في و جد أصغر مساحة ممكنة للمثلث أهـ و .

نفرض ده = س

ل و = ص



هـ = هـ بالتناظر

عليه حل السؤال بالتشابه رح نستخدمه كما في اسئلة قادمة

$\measuredangle$ هـ

ظاهـ = $\frac{٤}{س}$ من Δ هـ د جـ

ظاهـ = $\frac{ص}{٩}$ من Δ جـ ب و

$\frac{ص}{٩} = \frac{٤}{س}$

م = $\frac{١}{٢}$ (٤+ص) (٩+س)

اقل ما يمكن

$\frac{ص}{٩} = \frac{٤}{س}$

ص = $\frac{٣٦}{س}$

م = $\frac{١}{٢}$ (٤ + $\frac{٣٦}{س}$) (٩+س)

م = $\frac{١}{٢}$ (٣٦ + ٤س + $\frac{٣٢٤}{س}$ + ٣٦)

$\frac{دم}{دس}$ = ٠ = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{-٣٢٤}{س^٢}$ + ٤)

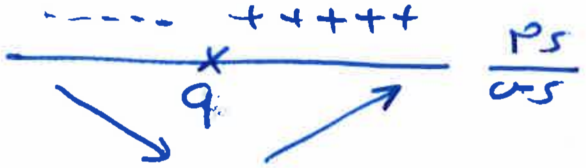
⇐ $\frac{٣٢٤}{س^٢}$ = ٤ ⇐ ٤س^٢ = ٣٢٤

⇐ س^٢ = ٨١ ⇐ س = ٩

ومنه ص = ٤

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٨

= ٧٢



اصغر ما يمكن لان عند س = ٩ صغرى محلية وحيدة

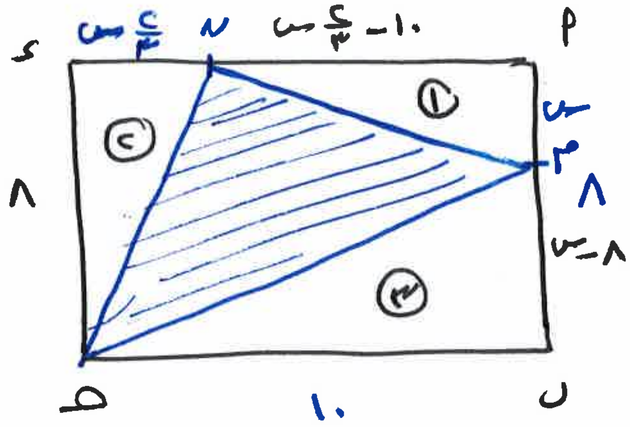
مستطيل عرضه أ ب = ٨سم وطول ب جـ = ١٠سم. م نقطة على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم

. ن نقطة على الضلع أ د بحيث ن د = $\frac{٢}{٣}$س. جد قيمة س بحيث مساحة Δم ن جـ أصغر ما يمكن

مساحة المثلث

= مساحة المستطيل

− مساحة ٣ مثلثات جانبية



$$\text{م} = ٨٠ - \left(\frac{١}{٢} \times \text{س}\,(١٠ - \frac{٢}{٣}\text{س}) + \frac{١}{٢} \times ٨ \times \frac{٢}{٣}\text{س} + \frac{١}{٢} \times ١٠ \times (٨ - \text{س})\right)$$

① ② ③

$$\text{م} = ٨٠ - \left(\cancel{٥\text{س}} - \frac{١}{٣}\text{س}^٢ + \frac{٨}{٣}\text{س} + ٤٠ - \cancel{٥\text{س}}\right)$$

$$\text{م} = ٨٠ - \left(-\frac{١}{٣}\text{س}^٢ + \frac{٨}{٣}\text{س} + ٤٠\right)$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دس}} = ٠ = ٠ - \left(-\frac{٢}{٣}\text{س} + \frac{٨}{٣}\right)$$

$$٠ = \frac{٢}{٣}\text{س} - \frac{٨}{٣} \Leftarrow \frac{٢}{٣}\text{س} = \frac{٨}{٣}$$

$$\Leftarrow \text{س} = ٤$$

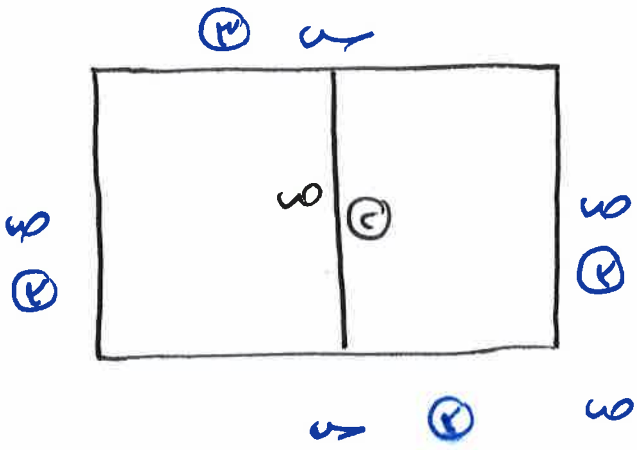
$\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ − − − − − − ✕ + + + + + + + +

٤

أصغر مساحة لأن عند س = ٤ قيمة صغرى محلية وحيدة فهي مطلقة.

تطبيقات القيم القصوي

- حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٢٧٠٠م^{٢} يراد إحاطتها بسور يتكلف المتر منه ٣ دنانير وكذلك استخدم سور آخر يقسم الحديقة إلى قسمين متساويين المساحة ويتكلف المتر منه دينارين . أوجد بعدي الحديقة لتكون التكاليف أقل ما يمكن .



نفرض بعدي المستطيل س ، ص

م = س ص = ٢٧٠٠

$ص = \frac{٢٧٠٠}{س}$

ن = ٢ص + ٣ص + ٣س + ٣س + ٢ص

ن = ٦س + ٨ص

$ن = ٦س + \frac{٨ \times ٢٧٠٠}{س}$ أقل ما يمكن .

$\frac{دن}{دس} = ٦ - \frac{٨ \times ٢٧٠٠}{س^{٢}} = ٠$

$\frac{٨ \times ٢٧٠٠}{س^{٢}} = ٦ \Leftarrow ٦س^{٢} = ٢٧٠٠ \times ٨$

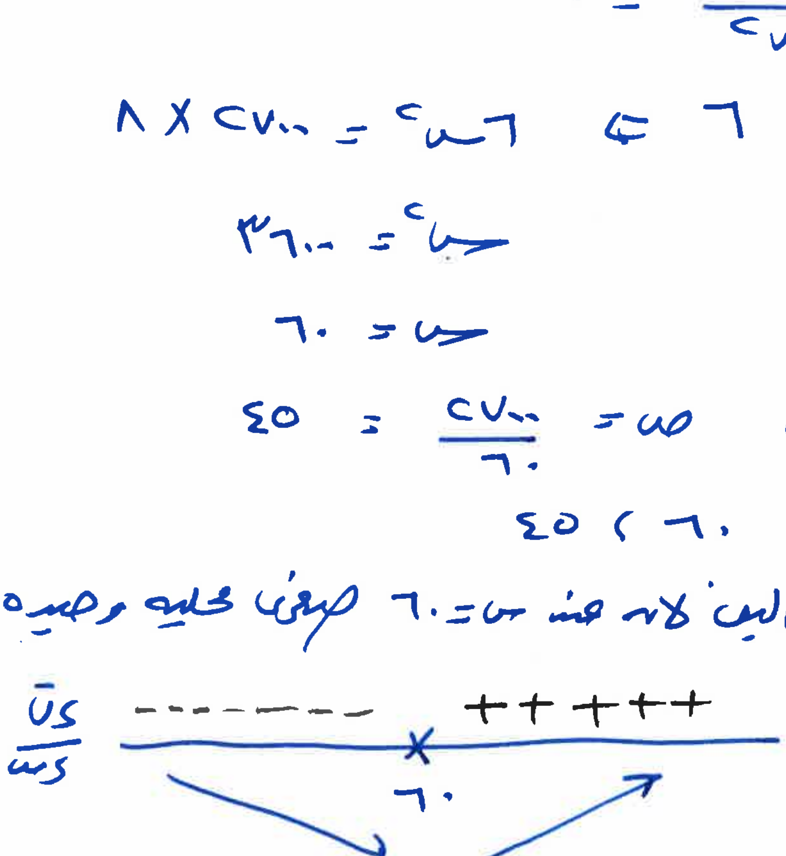
$س^{٢} = ٣٦٠٠$

س = ٦٠

بالتعويض $ص = \frac{٢٧٠٠}{٦٠} = ٤٥$

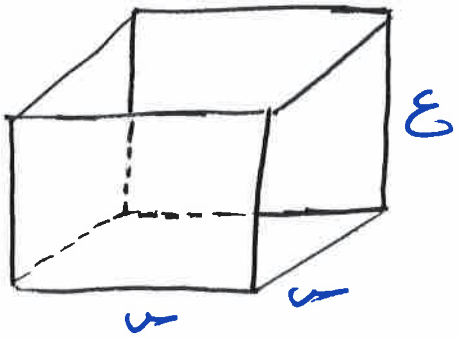
ابعاد الحديقة ٦٠ ، ٤٥

تعطي أقل تكاليف لانه عند س = ٦٠ صغرى محلية وحيدة



يراد صنع صندوق من الخشب الرقيق دون غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل أوجد أكبر حجم ممكن للصندوق بحيث تبلغ تكاليف صناعته ١٤٤دينار علماً بأن تكلفة المتر المربع الواحد من الخشب الرقيق ٣دنانير .

نفرض الطول س ، العرض س ، الارتفاع ع
لأنه قاعدة المتوازي مربعة



المساحة = مساحة ٥ أوجه

$م = س^2 + ٤ س ع$

$ت = ٣ (س^2 + ٤ س ع)$

$١٤٤ = ٣ (س^2 + ٤ س ع)$

$س^2 + ٤ س ع = ٤٨ \Leftarrow ٤ س ع = ٤٨ - س^2$

$\Leftarrow ع = \frac{١٢}{س} - \frac{س}{٤}$ ---- (١)

$ح = س^2 ع$

$ح = س^2 \left(\frac{١٢}{س} - \frac{س}{٤}\right)$

$ح = ١٢ س - \frac{س^3}{٤}$

$\frac{دح}{دس} = ٠ = ١٢ - \frac{٣ س^2}{٤}$

$\frac{٣ س^2}{٤} = ١٢ \Leftarrow س^2 = ١٦ \Leftarrow س = ٤$

وبالتعويض $ع = ٣ - ١$

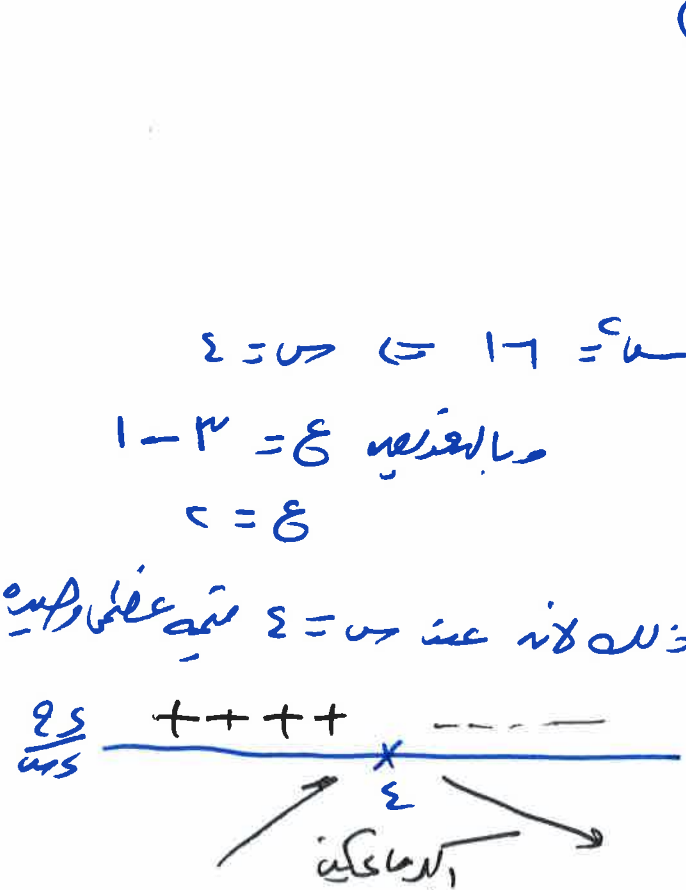
$ع = ٢$

أكبر حجم للصندوق $= س^2 ع$

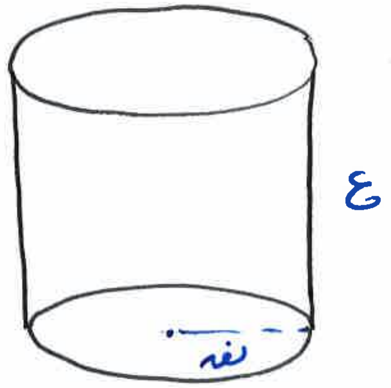
$= ١٦ \times ٢$

$= ٣٢$

وذلك لأنه عند س = ٤ قيمة عظمى محلية



- مقلمة على شكل اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ π سم^{٣}. فإذا علمت أن سعر ١سم^{٣} من البلاستيك المستخدم لصناعة القاعدة ٣ أمثال ١سم^{٣} من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب. جد أبعاد المقلمة ذات التكلفة الأقل .



ح = ١٩٢π = π نق^{٢} ع

١٩٢ = نق^{٢} ع

ع = $\frac{١٩٢}{نق^{٢}}$

م = π نق^{٢} + ٢π نق ع

الأسطوانة مفتوحة من أعلى
تحسب مساحة قاعدة واحدة

ت = ٣π نق^{٢} + ٢π نق ع

تم ضرب القاعدة × ٣ لأن تكلفة سم^{٢} من القاعدة
٣ أمثال سم^{٢} من الجوانب

ت = ٣π نق^{٢} + ٢π نق × $\underbrace{\frac{١٩٢}{نق^{٢}}}$

ت = ٣π نق^{٢} + $\frac{٣٨٤\pi}{نق}$ أقل ما يمكن .

$\frac{دت}{دنق}$ = ٠ = ٦π نق − $\frac{٣٨٤\pi}{نق^{٢}}$

٦π نق = $\frac{٣٨٤\pi}{نق^{٢}}$ ⟸ ٦ نق^{٣} = ٣٨٤

نق^{٣} = ٦٤

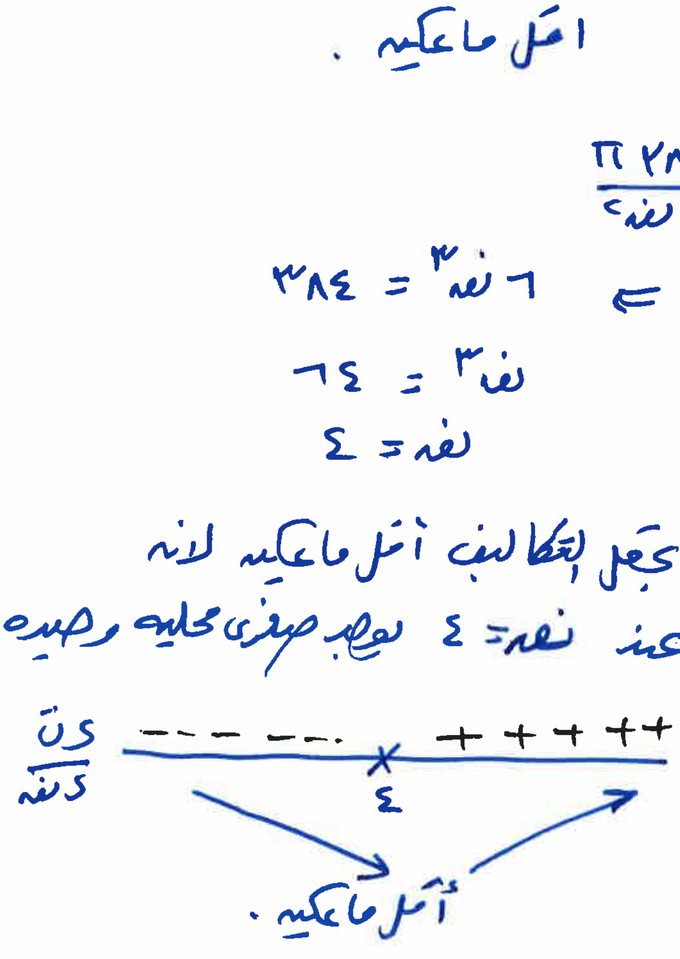
نق = ٤

أبعاد المقلمة

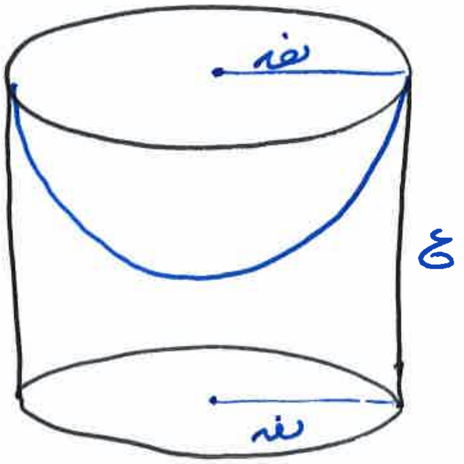
نق = ٤

ع = $\frac{١٩٢}{١٦}$ = ١٢

تجعل التكاليف أقل ما يمكن لأنه
عند نق = ٤ توجد صغرى محلية وحيدة



- قطعة من الخشب على شكل اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٤٠٠ π سم^{٢} . حفر في هذه القطعة نصف كرة قطرها مساوٍ لطول قطر قاعدة هذه الاسطوانة. جد طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الاسطوانة أكبر ما يمكن .



م الجانبية = π ٤٠٠ = π ٢ نق ع

⇐ نق ع = ٢٠٠

$ع = \frac{٢٠٠}{\text{نق}}$

قطر الاسطوانة = قطر الكرة

ح = ح الاسطوانة − ح نصف كرة

ح = π نق^{٢} ع − $\frac{٢}{٣}$ π نق^{٣}

ح = $\frac{\pi \text{ نق}^{٢} \times ٢٠٠}{\text{نق}}$ − $\frac{٢}{٣}$ π نق^{٣}

ح = ٢٠٠ π نق − $\frac{٢}{٣}$ π نق^{٣} اكبر ما يمكن .

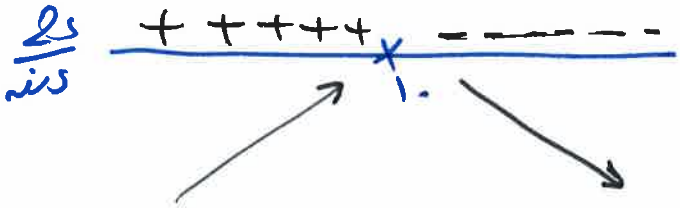
$\frac{دح}{د\text{نق}}$ = ٠ = ٢٠٠ π − ٢ π نق^{٢}

٢ π نق^{٢} = ٢٠٠ π

⇐ نق^{٢} = ١٠٠

⇐ نق = ١٠ يجعل حجم الجزء المتبقي اكبر ما يمكن

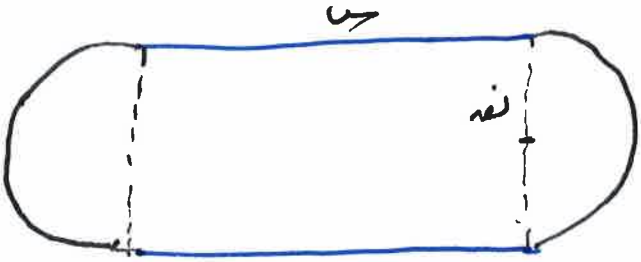
لأنه عند نق = ١٠ قيمة عظمى محلية وحيدة



- ملعب على شكل مستطيل ينتهي عرضاه بنصفي دائرة قطرها عرض الملعب فإذا كان محيط الملعب ٤٤٠م. أوجد أبعاد الجزء المستطيل لتكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن .

نفرض نصف قطر الدائرة نق

طول المستطيل س



محيط الدائرة ٢π نق

محيط الملعب = ٤٤٠م

٤٤٠ = ٢س + ٢π نق

٢٢٠ = س + π نق

⟸ س = ٢٢٠ − π نق

م = س × ٢نق

م = ٢نق × (٢٢٠ − π نق)

م = ٤٤٠ نق − ٢π نق^2 أكبر ما يمكن .

$\frac{\text{دم}}{\text{د نق}}$ = ٤٤٠ − ٤π نق = ٠

٤π نق = ٤٤٠ ⟸ نق = $\frac{١١٠}{\pi}$

ومنه س = ٢٢٠ − $\frac{١١٠ \times \pi}{\pi}$ = ١١٠

$\frac{\text{دم}}{\text{د نق}}$ + + + +   ✕   − − − −

$\frac{١١٠}{\pi}$

قيمة عظمى محلية وهي وحيدة فهي مطلقة .

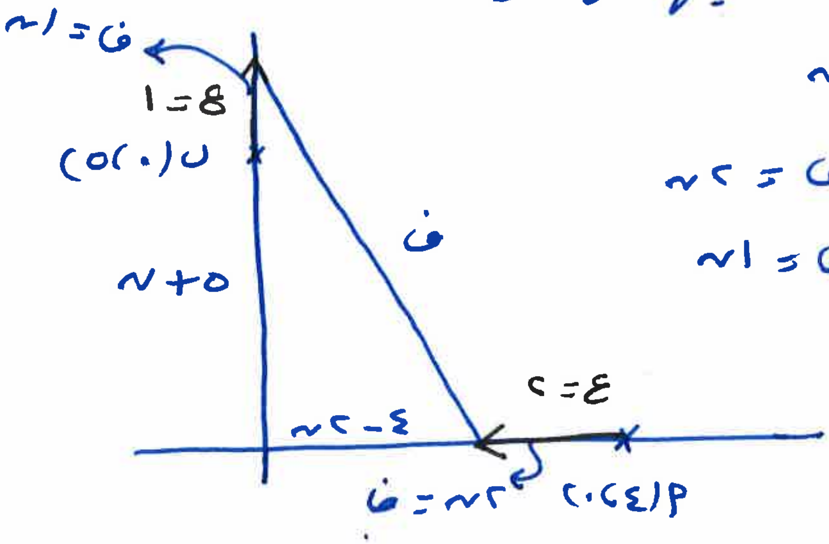
أبعاد المستطيل

س = ١١٠

٢نق = $\frac{١١٠ \times ٢}{\pi}$ = $\frac{٢٢٠}{\pi}$

- إذا كان أ ، ب نقطتان ثابتتان بحيث أ(٤ ، ٠) ، ب(٠ ، ٥) بدأت نقطة الحركة من أ على محور السينات باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٢ وحدة/ث وفي نفس الوقت بدأت نقطة الحركة من ب على محور الصادات مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ١ وحدة/ث. متى يكون البعد بين النقطتين أقل ما يمكن .

المطلوب أن ف البعد بينهما أقل ما يمكن .



لاحظ أن ف = ع ن

يعني ع$_1$ = ٢ ⇐ ف = ٢ن

ع$_2$ = ١ ⇐ ف = ١ن

وبذلك يكون

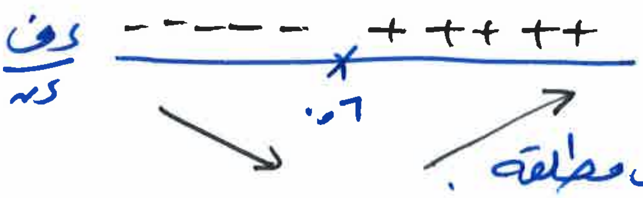
ف = √(٤ - ٢ن)² + (٥ + ن)²

ف = √١٦ - ١٦ن + ٤ن² + ٢٥ + ١٠ن + ن²

ف = √٥ن² - ٦ن + ٤١   أقل ما يمكن

دف/دن = (١٠ن - ٦) / (٢√٥ن² - ٦ن + ٤١) = ٠

١٠ن = ٦ ⇐ ن = ٠,٦ ثانية

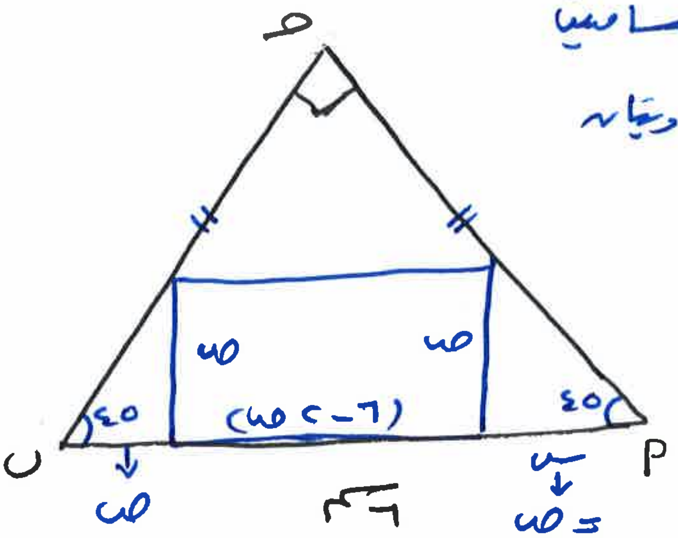


أقل مسافة عند ن = ٠,٦ .

لأن عند ن = ٠,٦ .

تحقق صغرى محلية وحيدة فهي مطلقة .

- أ ب جـ قائم الزاوية في جـ وطول الوتر أ ب، أ ب = ٦سم ومتساوي الساقين، أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث قاعدته على أ ب ورأساه على ضلعي القائمة .



كون المثلث متساوي الساقين

ـ زاويتا أ ، ب متساويتان

وكل منهما ٤٥°

لاحظ أن ظا٤٥ = ١ = $\frac{ص}{س}$

⇐ ص = س

م = ص × (٦ − ٢ص)

م = ٦ص − ٢ص^{٢}

$\frac{دم}{دص}$ = ٠ = ٦ − ٤ص

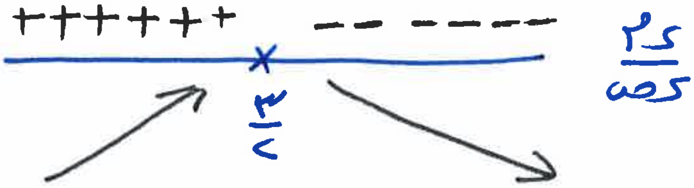
⇐ ٦ = ٤ص ⇐ ص = $\frac{٣}{٢}$

وبالتعويض

الطول = ٦ − ٢ × $\frac{٣}{٢}$ = ٣

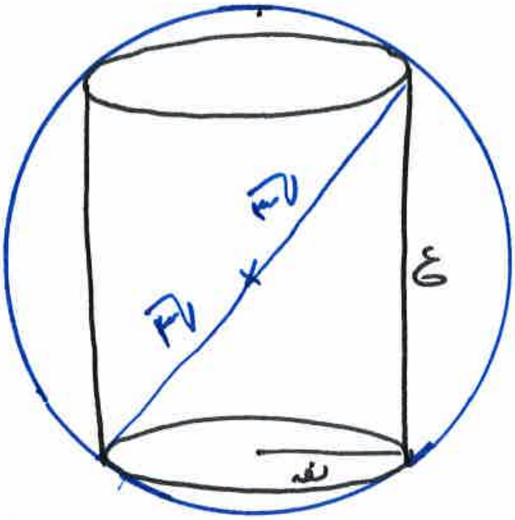
مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٣ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ وهي أكبر مساحة لأنه عند ص = $\frac{٣}{٢}$ قيمة عظمى محلية وحيدة



أوجد أكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها $\sqrt{٣}$ سم .

نفرض نصف قطر الأسطوانة نق
الارتفاع ع .
يكون قطر الكرة منطبق على
قطر الأسطوانة لتكون الأسطوانة
أكبر ما يمكن



$$ع^{٢} + (٢نق)^{٢} = (٢\sqrt{٣})^{٢}$$

$$ع^{٢} + ٤نق^{٢} = ١٢$$

$$٤نق^{٢} = ١٢ - ع^{٢}$$

$$نق^{٢} = ٣ - \frac{ع^{٢}}{٤}$$

$$ح = \pi\, نق^{٢}\, ع$$

$$ح = \pi\, ع \left(٣ - \frac{ع^{٢}}{٤}\right)$$

$$ح = \pi \left(٣ع - \frac{ع^{٣}}{٤}\right)$$

$$\frac{دح}{دع} = ٠ = \pi \left(٣ - \frac{٣ع^{٢}}{٤}\right)$$

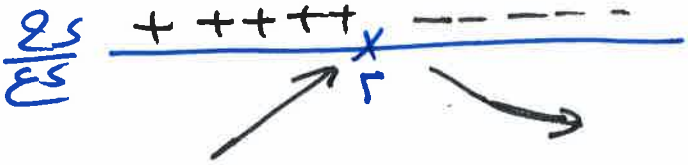
$$٣ = \frac{٣ع^{٢}}{٤} \Leftarrow ع^{٢} = ٤ \Leftarrow ع = ٢$$

$$نق = \sqrt{٢}$$

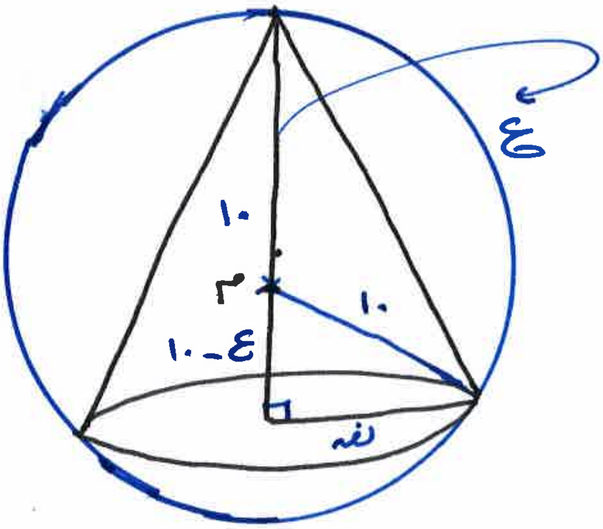
$$ح = \pi\, نق^{٢}\, ع$$

$ح = \pi \times ٢ \times ٢ = ٤\pi$ أكبر حجم للأسطوانة

لأنه عند ع = ٢ قيمة عظمى محلية
وحيدة فهي مطلقة



- ما أبعاد أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ١٠سم .



نفرض ارتفاع المخروط ع
ونصف قطره نق

$$نق^{٢} + (ع - ١٠)^{٢} = ١٠^{٢}$$

$$نق^{٢} + ع^{٢} - ٢٠ع + ١٠٠ = ١٠٠$$

$$نق^{٢} = ٢٠ع - ع^{٢}$$

$$ح = \frac{١}{٣} \pi نق^{٢} ع \ .$$

$$ح = \frac{١}{٣} \pi ع (٢٠ع - ع^{٢})$$

$$ح = \frac{١}{٣} \pi (٢٠ع^{٢} - ع^{٣})$$

$$\frac{دح}{دع} = ٠ = \frac{١}{٣} \pi (٤٠ع - ٣ع^{٢})$$

$$\Leftarrow \ ٤٠ع = ٣ع^{٢}$$

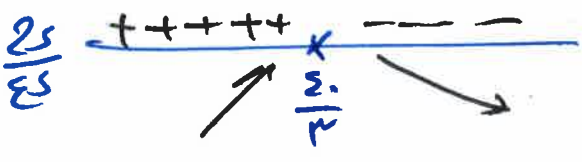
$$\Leftarrow \ ٠ = ٣ع^{٢} - ٤٠ع = ع(٣ع - ٤٠) = ٠$$

$$ع = ٠ \ \times \qquad ع = \frac{٤٠}{٣} \ ✓$$

$$نق = \sqrt{٢٠ \times \frac{٤٠}{٣} - \left(\frac{٤٠}{٣}\right)^{٢}}$$

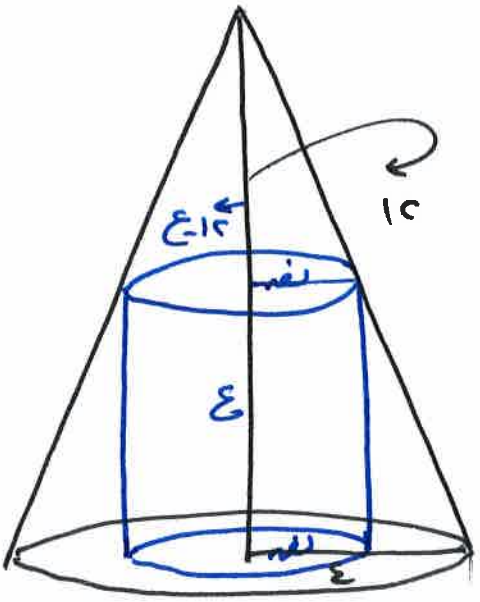
$$نق = \sqrt{\frac{٨٠٠}{٣} - \frac{١٦٠٠}{٩}} = \sqrt{\frac{٨٠٠}{٩}} = \frac{٢٠\sqrt{٢}}{٣}$$

أكبر حجم للمخروط لأنه عند $ع = \frac{٤٠}{٣}$



تصبح عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة .

جد حجم أكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢سم ونصف قطر قاعدته ٤سم .



من التشابه $\frac{نق}{٤} = \frac{١٢-ع}{١٢}$

نق = $\frac{١٢-ع}{٣}$

٣نق = ١٢ - ع

ع = ١٢ - ٣نق

ح = π نق² ع

⇐ ح = π نق² (١٢ - ٣نق)

⇐ ح = π (١٢نق² - ٣نق³)

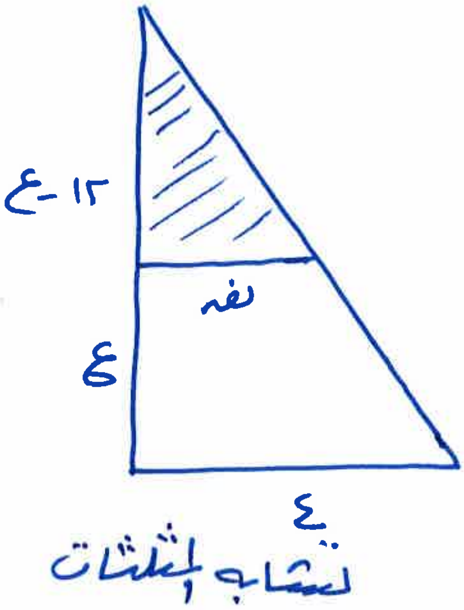
$\frac{دح}{دنق}$ = ٠ = π (٢٤نق - ٩نق²)

نق(٢٤ - ٩نق) = ٠

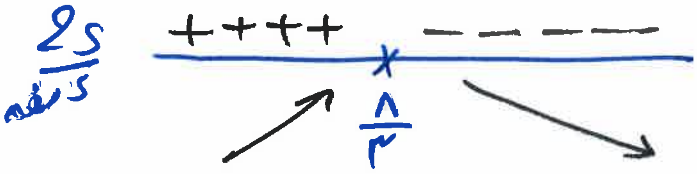
نق = $\frac{٢٤}{٩} = \frac{٨}{٣}$

ع = ١٢ - ٣ × $\frac{٨}{٣}$

ع = ٤ ⇐ ح = $\frac{٢٥٦}{٩}$π



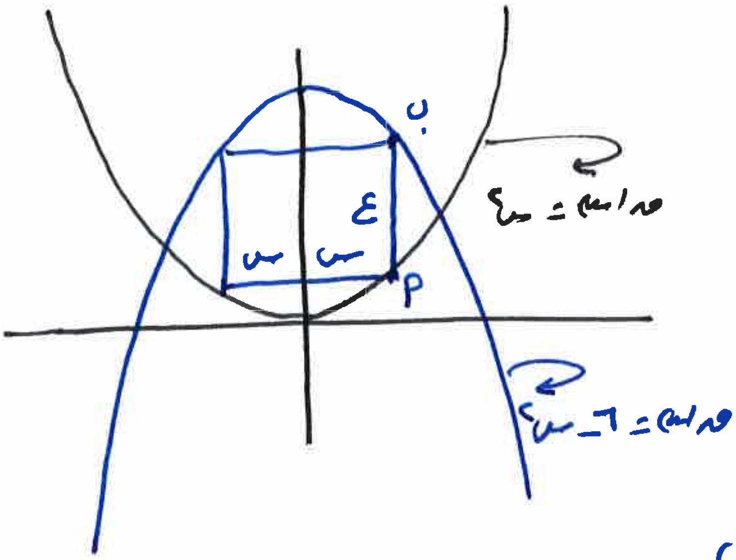
أكبر حجم للأسطوانة عندما نق = $\frac{٨}{٣}$ سم



عندها قيمة عظمى محلية وحيدة في منطقة

تطببقات القيم القصوي

ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث رؤوسه الأربعة على منحنيات $ق(س) = س^{٢}$، $هـ(س) = ٦ - س^{٢}$.



التماثل موجود حول محور الصادات

$م = ٢س\,ع$

$م = ٢س\,(٦ - س^{٢} - س^{٢})$

$م = ٢س\,(٦ - ٢س^{٢})$

$م = ١٢س - ٤س^{٣}$

النقطة أ $(س ، س^{٢})$

النقطة ب $(س ، ٦ - س^{٢})$

الارتفاع $ع = ٦ - س^{٢} - س^{٢}$

$\frac{دم}{دس} = ٠ = ١٢ - ١٢س^{٢}$

$١٢س^{٢} = ١٢ \Leftarrow س^{٢} = ١ \Leftarrow س = ١$

عندما $س = ١$ $\quad ع = ٦ - ٢س^{٢} \Big|_{س=١}$

$ع = ٤$

$م = ٢س \times ٤$

$= ٢ \times ١ \times ٤ = ٨$

أكبر مساحة لانه عند $س = ١$ عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة

$\frac{دم}{دس}$ + + + + + | − − − − − −

١

ع محليه وحيده فهي مطلقه .

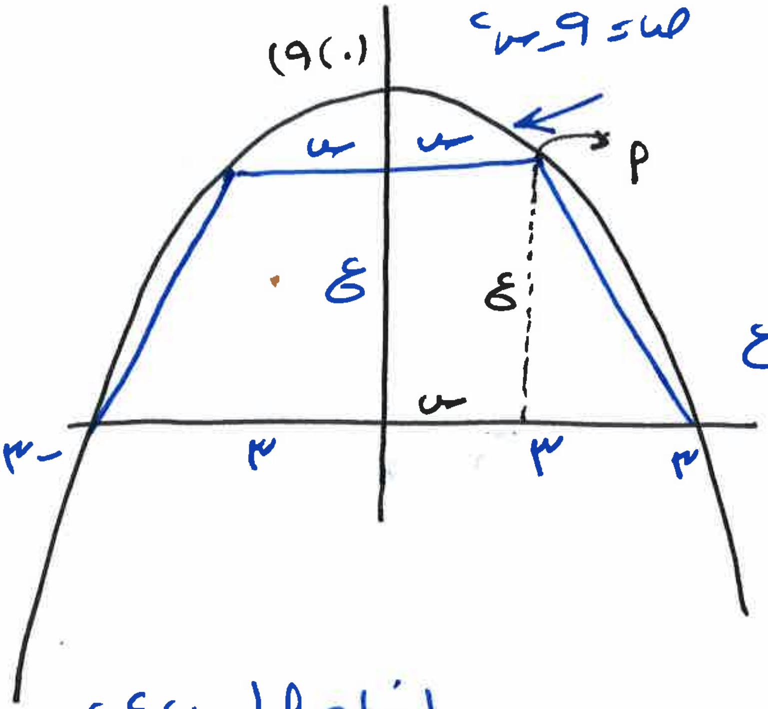
جد أكبر مساحة لشبه المنحرف الذي يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الأخران على منحنى العلاقة ص = ٩ – س ^{٢} .

٩ − س^{2} = ٠

س^{2} = ٩ ⇐ س = ∓٣

التمثيل موجود

م = ½ مجموع القاعدتين × الارتفاع



النقطة أ (س، ع)

(س ، ٩ − س^{2})

لأن تقع على المنحنى

(س ، ٩ − س^{2})

م = ½ (٦ + ٢س) × ع

م = (٣ + س) × (٩ − س^{2})

م = ٢٧ − ٣س^{2} + ٩س − س^{3}

$\frac{دم}{دس}$ = ٠ = −٦س + ٩ − ٣س^{2} ÷(−٣)

⇐ س^{2} + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

س = −٣ ×

س = ١ ⇐ ع = ٩ − ١
= ٨

م = ½ (٦ + ٢×١) × ٨

م = ½ × ٨ × ٨ = ٣٢ وحدة مربعة المساحة

$\frac{دم}{دس}$ + + + + × − − − −

أكبر ما يمكن

عظمى كلية وحيدة

- جد بعدي المستطيل الواقع في الربع الأول والذي مساحته أكبر ما يمكن والذي تنطبق قاعدته على محور السينات ويقع رأساه الآخران على منحنى $ق(س) = ٦س - س^{٢} - ٥$.

جذوره / شكله

رأس منحناه

نحاول رسم منحنى $ص = -س^{2} + ٦س - ٥$

$س^{2} - ٦س + ٥ = ٠$

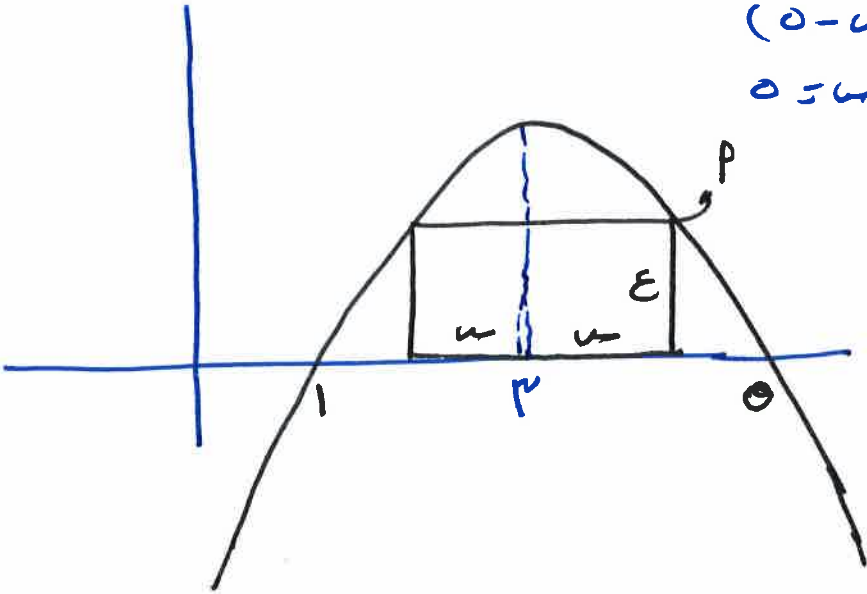
$(س - ١)(س - ٥)$

$س = ١$ أو $س = ٥$

رأس المنحنى $ق'(س) = ٠$

$-٢س + ٦ = ٠$

$س = ٣$



النقطة م تقع على المنحنى

إحداثياتها

$(٣ + س ، \overset{ع}{ق(٣ + س)})$

$م = ٢س \times ع$

$م = ٢س \left(ق(٣ + س)\right)$

$م = ٢س \left(٦(٣ + س) - (٣ + س)^{2} - ٥\right)$

$م = ٢س \left(١٨ + ٦س - ٩ - ٦س - س^{2} - ٥\right)$

$م = ٢س \left(-س^{2} + ٤\right)$

$م = -٢س^{3} + ٨س \Leftarrow \frac{دم}{دس} = ٠ = -٦س^{2} + ٨$

$٦س^{2} = ٨ \Leftarrow س = \sqrt{\frac{٨}{٦}}$

ابعاد المستطيل الاكبر $٢ \times \sqrt{\frac{٨}{٦}} = \frac{٤}{\sqrt{٣}}$

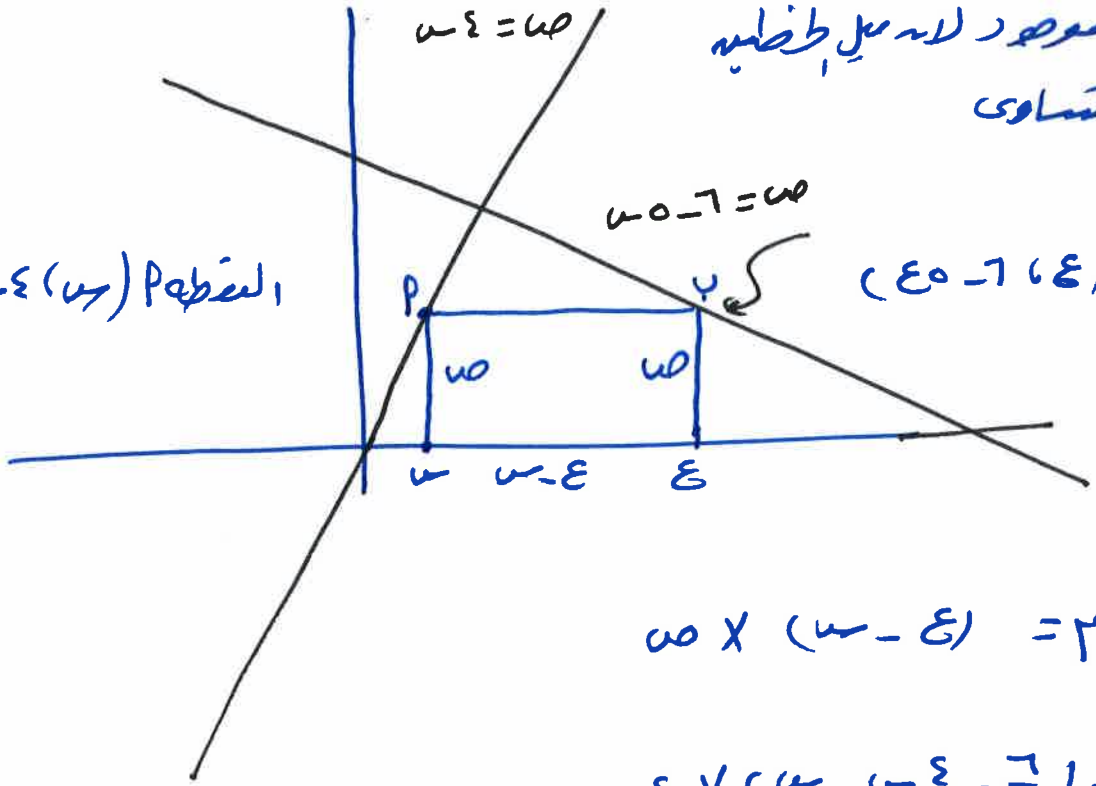
الارتفاع ع (العرض) $= ق\left(٢ + \frac{٤}{\sqrt{٣}}\right) =$

$\frac{دم}{دس}$ ++++ $\times$ ----

$\sqrt{\frac{٨}{٦}}$ ← الدعاكية

- أوجد مساحة أكبر مستطيل بحيث رأسان من رؤوسه على محور السينات الموجب ويقع الرأسان الآخران على المستقيمين ص = ٤س ، ص = ٦ – ٥س .

التماثل غير موجود لان ميل الخطين غير متساوى



النقطة أ (س ، ٤س)

النقطة ب (ع ، ٦ ـ ٥ع)

$$م = (ع - س) \times ص$$

$$م = (\frac{٦}{٥} - \frac{٤}{٥}س - س) \times ٤س$$

$$م = (\frac{٦}{٥} - \frac{٩}{٥}س) \times ٤س$$

$$م = \frac{٢٤}{٥}س - \frac{٣٦}{٥}س^٢$$

$$\frac{دم}{دس} = \frac{٢٤}{٥} - \frac{٧٢}{٥}س$$

$$\frac{٧٢}{٥}س = \frac{٢٤}{٥} \Leftarrow س = \frac{١}{٣}$$

$$م = \frac{٢٤}{٥} \times \frac{١}{٣} - \frac{٣٦}{٥} \times \frac{١}{٩} = \frac{١٢}{١٥}$$

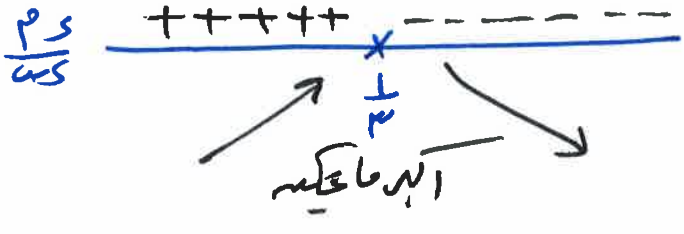
لاحظ ص = ص

$$\Leftarrow ٤س = ٦ - ٥ع$$

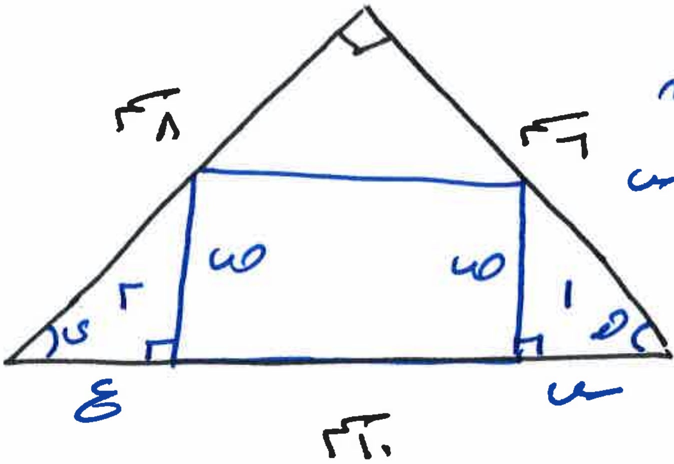
$$٥ع = ٦ - ٤س$$

$$ع = \frac{٦}{٥} - \frac{٤}{٥}س$$

أكبر مساحة



- مثلث قائم الزاوية طول وترة ١٠سم وطول ضلعي القائمة ٦سم ، ٨ سم رسم داخلة مستطيل راسان من رؤوسة علي الوتر ورأسان اخران علي ضلعي القائمة اوجد اكبر مساحة للمستطيل



لاحظ لايوجد تماثل

∆ ١ ، ٢ مثلث ٢ غير متطابقان

$ظا\,هـ = \frac{ص}{س} = \frac{٨}{٦} \Leftarrow ص = \frac{٨}{٦}\,س$

$س = \frac{٦}{٨}\,ص$

$ظا\,ى = \frac{ص}{ع} = \frac{٦}{٨} \Leftarrow ع = \frac{٨}{٦}\,ص$

$م = \left(١٠ - (س + ع)\right) \times ص$

$م = \left(١٠ - \left(\frac{٦}{٨}\,ص + \frac{٨}{٦}\,ص\right)\right) \times ص$

$م = \left(١٠ - \frac{٢٥}{١٢}\,ص\right) \times ص$

$م = ١٠\,ص - \frac{٢٥}{١٢}\,ص^٢$

$\frac{دم}{دص} = ٠ = ١٠ - \frac{٢٥}{٦}\,ص \Leftarrow \frac{٢٥}{٦}\,ص = ١٠$

$\Leftarrow ص = \frac{٦٠}{٢٥} = \frac{١٢}{٥}$

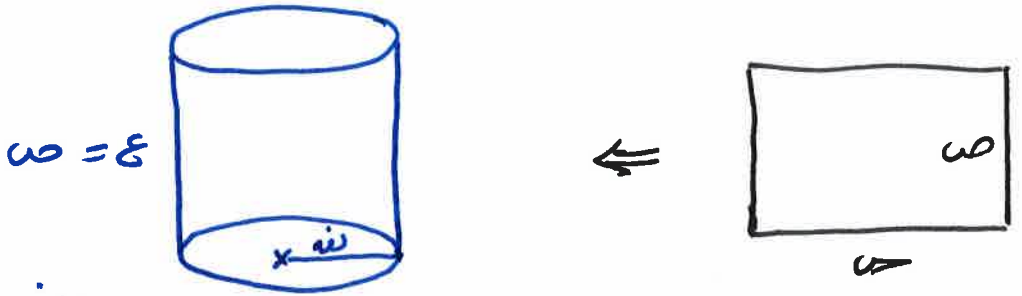
$م = ١٠ \times \frac{١٢}{٥} - \frac{٢٥}{١٢} \times \frac{١٤٤}{٢٥}$

$م = ٢٤ - ١٢ = ١٢$ المساحة لأن

$\frac{دم}{دص}$ +++++ × ------ $\frac{١٢}{٥}$

حيث ص = $\frac{١٢}{٥}$ قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة

- قطعة من الورق مستطيلة الشكل محيطها ٣٠سم ثنيت لتكون أسطوانة دائرية قائمة، ما أكبر حجم ممكن لهذه الأسطوانة .



$س = ٢\pi نق$

$نق = \frac{س}{٢\pi}$

$٢س + ٢ص = ٣٠$

$\Leftarrow س + ص = ١٥ \Leftarrow ص = ١٥ - س$

$ح = \pi\, نق^{٢}\, ع$.

$ح = \pi \times \frac{س^{٢}}{٤\pi^{٢}} \times ص$

$ح = \frac{١}{٤\pi}\, س^{٢}\,(١٥ - س)$

$ح = \frac{١}{٤\pi}\,(١٥س^{٢} - س^{٣})$

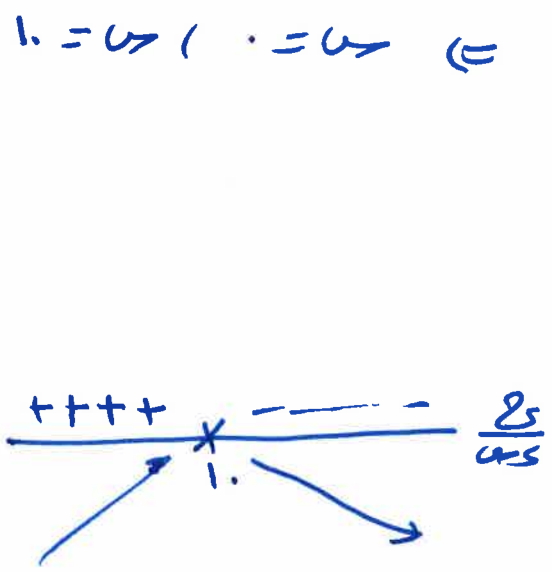
$\frac{دح}{دس} = ٠ = \frac{١}{٤\pi}\,(٣٠س - ٣س^{٢})$

$٣٠س = ٣س^{٢} \Leftarrow س = ٠ \text{ ، } س = ١٠$

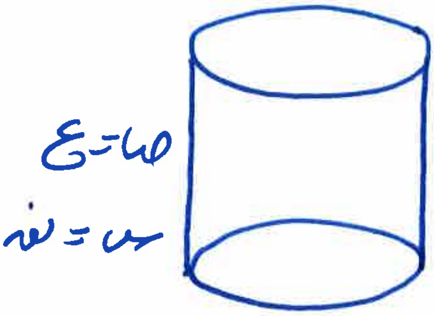
$ح = \frac{١}{٤\pi}\,(١٥ \times ١٠٠ - ١٠٠٠)$

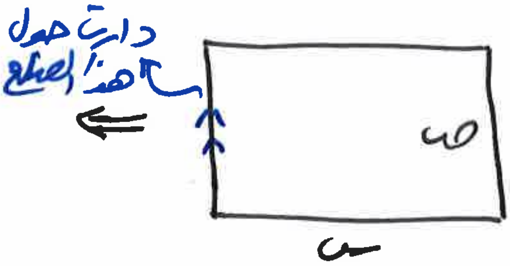
$ح = \frac{٥٠٠}{٤\pi}$ الحجم لانه

عند س = ١٠ عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة



- قطعة من الورق مستطيلة الشكل محيطها ٣٠سم دارت حول احد اضلاعها لتكون أسطوانة دائرية قائمة، ما أكبر حجم ممكن لهذه الأسطوانة .





٢س + ٢ص = ٣٠

⟸ س + ص = 15 ⟸ ص = 15 − س

ح = π نق² ع

ح = π س² × ص

ح = π س² (15 − س)

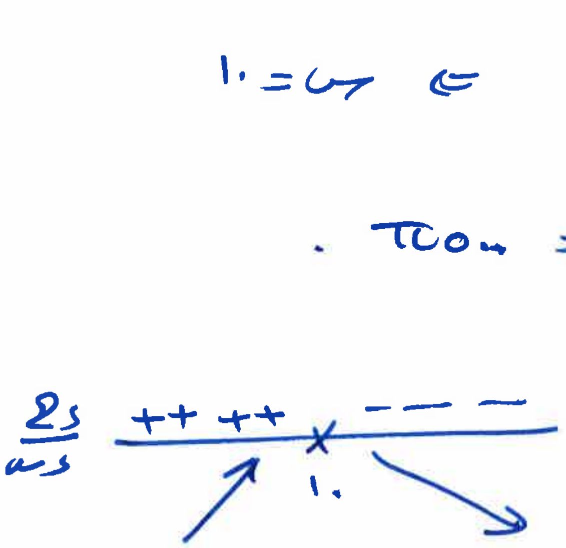
ح = π (15س² − س³)

دح/دس = ٠ = π (٣٠س − ٣س²)

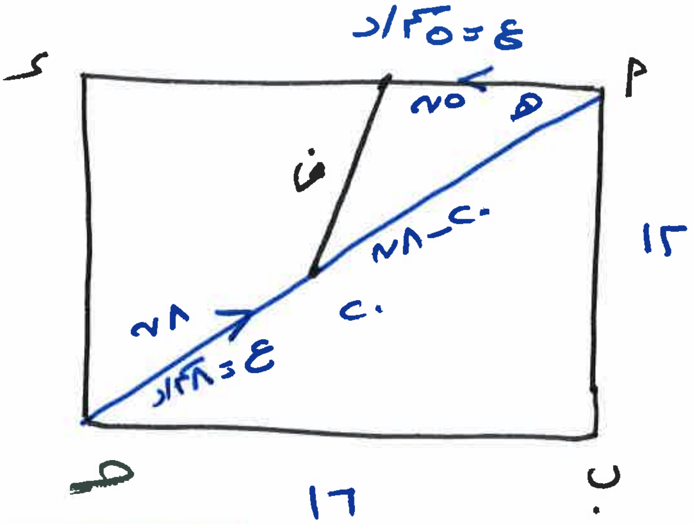
٣٠س = ٣س² ⟸ س = ١٠

ح = π (15 × ١٠² − ١٠³) = ٥٠٠π .

أكبر حجم لأنه عند س = ١٠ يوجد قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة



- أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٢سم وطول ب جـ = ١٦سم. سارت نملة من أ باتجاه د بسرعة ٥ سم/د وسارت نملة أخرى من جـ باتجاه أ على القطر أ جـ بسرعة ٨سم/د. متى تكون المسافة بين النملتين أقل ما يمكن.



نفرض الزمن ن

ف = ع ن

المثلث ليس قائم

∴ نستخدم قانون جيب التمام

$$\text{جتا هـ} = \frac{١٦}{٢٠} = \frac{٤}{٥}$$

$$\text{القطر} = \sqrt{(١٦)^2 + (١٢)^2} = ٢٠$$

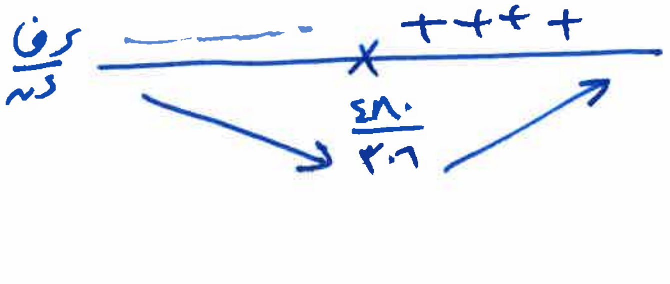
$$\text{ف} = \sqrt{(٥\text{ن})^2 + (٢٠ - ٨\text{ن})^2 - ٢ \times ٥\text{ن} \times (٢٠ - ٨\text{ن}) \times \text{جتا هـ}}$$

$$\text{ف} = \sqrt{٢٥\text{ن}^2 + ٤٠٠ - ٣٢٠\text{ن} + ٦٤\text{ن}^2 - ٢ \times ٥\text{ن} (٢٠ - ٨\text{ن}) \times \frac{٤}{٥}}$$

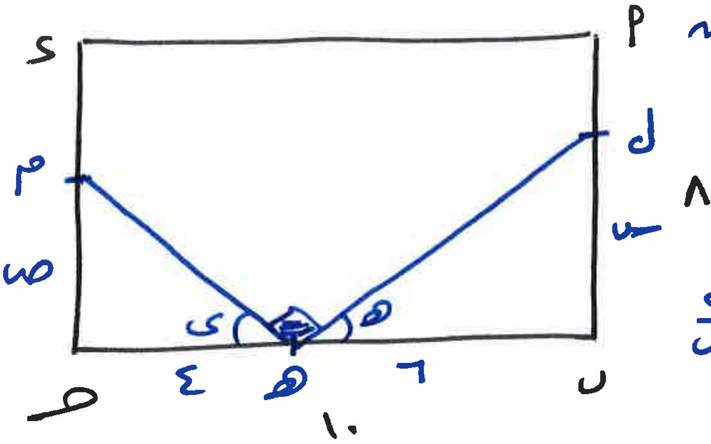
$$\text{ف} = \sqrt{٢٥\text{ن}^2 + ٤٠٠ - ٣٢٠\text{ن} + ٦٤\text{ن}^2 - ١٦٠\text{ن} + ٦٤\text{ن}^2}$$

$$\text{ف} = \sqrt{١٥٣\text{ن}^2 - ٤٨٠\text{ن} + ٤٠٠}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٣٠٦\text{ن} - ٤٨٠}{٢\sqrt{١٥٣\text{ن}^2 - ٣٢٠\text{ن} + ٤٠٠}} = ٠ \Leftarrow \text{ن} = \frac{٤٨٠}{٣٠٦}$$



- أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٨سم وطول ب جـ = ١٠سم. هـ نقطة على ب جـ بحيث ب هـ = ٦ سم. أخذت نقطة ل على أ ب، م على د جـ بحيث قياس ∠ل هـ م = ٩٠°، أوجد طول كل من ل ب ، م جـ بحيث مساحة أل هـ م د أكبر مايمكن .



لاحظ هـ + ى = ٩٠° متتامتان

ظا هـ = ظتا ى

$\frac{س}{٦} = \frac{٤}{ص}$

س ص = ٢٤ ⇐ ص = $\frac{٢٤}{س}$

م = مساحة المستطيل − مساحة مثلثين

م = ٨٠ − (٢ص + ٣س)

م = ٨٠ − ($\frac{٢٤}{س}$ × ٢ + ٣س)

م = ٨٠ − ($\frac{٤٨}{س}$ + ٣س)

$\frac{دم}{دس}$ = ٠ = − (٣ − $\frac{٤٨}{س^2}$)

⇐ ٣ = $\frac{٤٨}{س^2}$ ⇐ ٣س² = ٤٨ ⇐ س² = ١٦

س = ٤

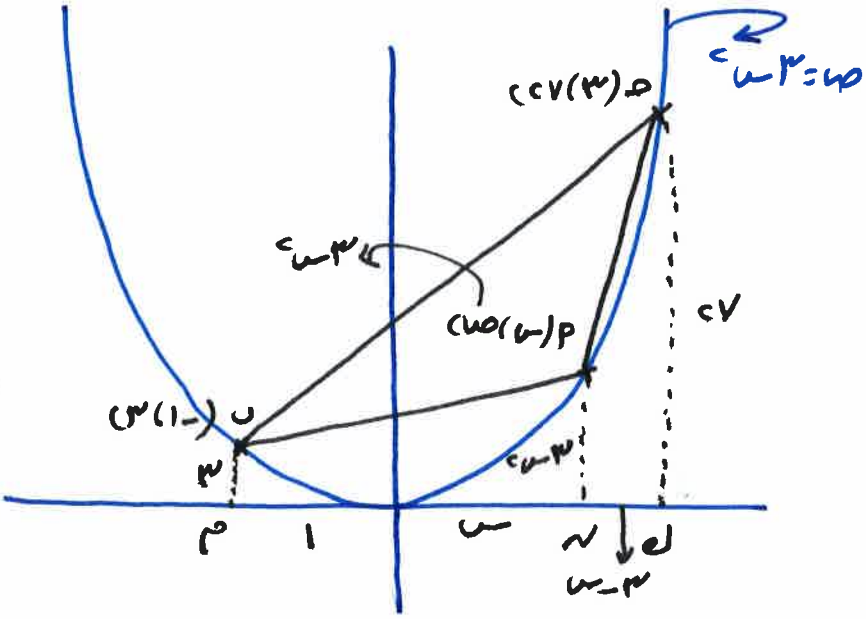
وبالتعويض ص = ٦

س = ٤
ص = ٦ تجعل المساحة أكبر ما يمكن

$\frac{دم}{دس}$ + + + + ✗ − − − − −
٤

لأنه عند س = ٤ قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة.

- إذاكانت ب(٣ ، ٢٧)، جـ(−١ ، ٣) نقطتان على منحنى ص = ٣ س ^{٢} والنقطة أ(س ، ص) نقطة على المنحنى بينهما، أوجد الإحداثي السيني للنقطة أ بحيث مساحة المثلث أب جـ أكبر ما يمكن .



مساحة △ أب جـ

= مساحة شبه المنحرف ب جـ ل م

− مساحة شبه المنحرف جـ أ ن ل

− مساحة شبه المنحرف أ ب م ن

م = ½ (٣ + ٢٧) × ٤ − ½ (٢٧ + ٣س ^{٢})(٣ − س) − ½ (٣ + ٣س ^{٢})(١ + س)

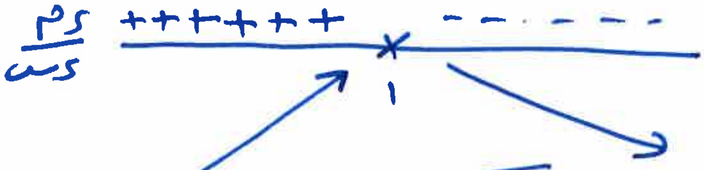
م = ٦٠ − ½ (٨١ − ٢٧س + ٩س ^{٢} − ٣س ^{٣}) − ½ (٣ + ٣س + ٣س ^{٢} + ٣س ^{٣})

م = ٦٠ − ٨١/٢ + ٢٧/٢ س − ٩/٢ س ^{٢} + ٣/٢ س ^{٣} − ٣/٢ − ٣/٢ س − ٣/٢ س ^{٢} − ٣/٢ س ^{٣}

م = ١٨ + ١٢س − ٦س ^{٢}

دم/دس = ٠ = ١٢ − ١٢س ⇐ ١٢س = ١٢

⇐ س = ١



أكبر مساحة لأنه

عند س = ١ عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة .

تطبيقات القيم القصوي

* مساحة المستطيل س ص   محيط المستطيل ٢ (س + ص)

* مساحة شبه المنحرف $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

* مساحة الدائرة π نق²   محيط الدائرة ٢ π نق .

* مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضلعين متجاورين × جيب الزاوية بينهما .

* مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق   محيط القطاع = ٢ نق + ل

* حجم الاسطوانة = π نق² ع   مساحة الاسطوانة $٢π نق^2 + \underbrace{٢π نق ع}_{المساحة الجانبية}$

* حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق² ع

* حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق³   مساحة الكرة = ٤ π نق²

* المسافة بين نقطتين ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2}$

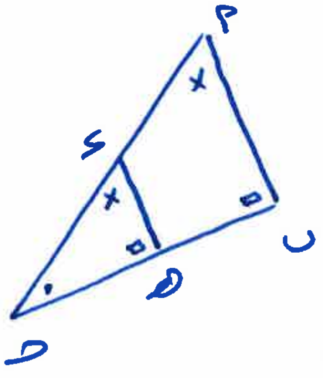
* في الزوايا المتتامة (مجموعهما ٩٠°)   هـ + ى = ٩٠°

جاهـ = جتاى   ظاهـ = ظتاى

* تشابه المثلثات

(١) تساوي الزوايا

(٢) تناسب الأضلاع



$\frac{جهـ}{جب} = \frac{جد}{جأ} = \frac{دهـ}{أب}$.

أجيب عن الأسئلة التالية :

١) جد أقصر مسافة بين النقطة (٢ ، ٠) ومنحنى العلاقة $ص^{٢} - س^{٢} = ٨$.

٢) دائرة طول قطرها ﺃب يساوي ٤سم بدأت النقطة **ﺟ** الحركة على الدائرة من **ب** بإتجاه ﺃ . جد قياس الزاوية التي تجعل مساحة المثلث ﺃ**ب ﺟ** أكبر ما يمكن .

٣) مستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢) ويقطع محوري السينات والصادات في النقطتين ﺃ ، **ب**، أوجد أصغر مساحة ممكنة للمثلث و ﺃ **ب** الواقع في الربع الأول " و نقطة الأصل " .

٤) نريد صنع صندوق مفتوح من الأعلى من قطعة مربعة الشكل طول ضلعها ٦سم وذلك بقطع ٤ مربعات متساوية من أطرافها الأربعة ثم طي الأجزاء البارزة لأعلى، أوجد أكبر حجم يمكن تكوينه بهذه الطريقة.

٥) سلك طوله ١٢م ثني على شكل مستطيل بحيث مر السلك على كل ضلع مرتين ماعدا ضلع واحد فقد مر عليه مرة واحدة. أوجد أبعاد المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

٦) جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤سم وارتفاعه ١٢سم حيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي .

٧) أوجد باستخدام التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول ضلعي القائمة ٨، ٦حول أحد أضلاعه القائمة دورة كاملة .

٨) يراد إنشاء حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٩٠٠$م^{٢}$ وإحاطها من جميع الجوانب بطريق خارجي منتظم عرضه ٢م، أوجد أبعاد الحديقة التي تجعل المساحة الكلية للحديقة والطريق أقل ما يمكن .

٩) جد مساحة أكبر مستطيل يقع رأسان من رؤوسه على منحنى $٤ص = س^{٢}$ ، ويقع الرأسان الآخران على المستقيم $ص = ٦$.

س

١٠) قطاع دائري محيطه ٢٨سم . أوجد قيمة زاويته المركزية عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن .

١١) صاحب مزرعة أغنام لديه ٣٦٠م من السلك المشبك يريد عمل ٦ حظائر مستطيلة الشكل ومساوية المساحة أوجد أكبر مساحة للحظائر يمكن عملها .

١٢) يراد صنع وعاء اسطواني الشكل قاعدته دائرية ومفتوح من الأعلى لتكون سعته ٥٤ π سم^{٣} . فإذا كانت تكاليف صنع السنتميتر المربع من الجوانب قرشين ومن القاعدة ٤ قروش . فجد أبعاد هذا الوعاء لتكون تكلفة صناعته أقل ما يمكن .

١٣) رسم مثلث داخل ربع دائرة نصف قطرها نق بحيث تنطبق قاعدة المثلث على نصف قطر الدائرة ويقع رأسه على محيطها، أثبت أن أكبر مساحة للمثلث $= \frac{١}{٢}$ نق^{٢} .

١٤) مثلث متساوي الساقين محيطه ١٨سم. أوجد أطوال أضلاعه عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن .

١٥) أوجد أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه في الربع الأول بحيث رأسان من رؤوسه على محور السينات و الرأسان الآخران على منحنى ص = س^{٢}، والخط المستقيم ص = ٢ − س .